III. Inequações, funções e seus gráficos*

António Caetano

Projeto MATEAS (CIDMA†) e DMat-UA

Desta vez o ponto de encontro havia sido marcado previamente com o mestre, por isso João dirigiu-se ao local combinado à hora combinada. Não era muito longe da casa do lago. Tratava-se de uma estrutura que aproveitava uma gruta natural, misturando-se com a montanha. À entrada tinha um letreiro com um nome curioso: "Universo das funções". Após uma antecâmara algo estreita e de teto não muito alto que permitia entrar-se na penumbra da montanha, o espaço abria-se numa sala de pé alto onde uma luz difusa deixava entrever que se estava dentro da gruta.

— Não posso crer! — João não conseguira evitar verbalizar a sua surpresa — São funções!

João referia-se às várias estruturas luminosas que entrecortavam a quase escuridão da sala e que pareciam pairar no ar, nalguns casos desaparecendo em direção ao teto ou parecendo enterrar-se pelo chão dentro:

— Ali estão o x^2 e o x^3 e mais além vejo o seno e o cosseno!

Entretanto João aproximara-se do mestre, que se encontrava, no que parecia ser o centro da sala, na sua habitual posição de meditação. João continuava a falar:

— Eu pensava que o mestre tinha algo contra a tecnologia, mas isto tem um ar altamente tecnológico!

O mestre fez sinal para a João se sentar ao seu lado, e foi a sua vez de falar:

— Há coisas relativamente às quais a tecnologia não traz nada de novo, e até pode atrapalhar. Em matemática precisamos de tempo para refletir que muitas vezes não se coaduna com a vertigem de algum espetáculo que as tecnologias têm permitido criar. No entanto, nalguns casos alguma tecnologia pode ser útil. Aqui nesta sala eu quis representar um pouco o universo das funções (reais de uma variável real), assim como na nossa primeira conversa representei através de bonecos dentro de uma caixa o universo que na altura criei com ratos e elefantes de um mundo estranho ao nosso.

— Isto é fantástico! — João sentara-se ao lado do mestre mas não conseguia manter-se quieta, porque havia estruturas luminosas não só à sua frente, mas

†O CIDMA é financiado pela FCT através do projeto UID/MAT/04106/2013.

a toda a volta dela e do mestre — Aquela ali atrás é uma exponencial, não é, com o seu crescimento tão rápido?... Mas há ali algumas que não conheço...

— Já lá iremos. Gostaria que começasses por reparar que, tal como na caixa os bonecos só representavam os animais, e não eram os verdadeiros animais, também aqui o que vês são representações das funções, e não as próprias funções.

— Sim, são os gráficos das funções, acho que é assim que se chamam...

— Em rigor, o que vês nesta sala é apenas uma impressão sobre o que são os gráficos dessas funções. Por exemplo, há gráficos que se estendem infinitamente, e aqui temos que nos confinar a um espaço limitado. Além disso, os gráficos não têm espessura, e aqui temos que dar-lhes alguma espessura para que se consigam ver.

— Não tinha pensado nisso, mas é claro que tem razão.

— Logo, em rigor, a representação gráfica está apenas nas nossas cabeças. O que vês aqui à volta serve somente para ajudar. Por exemplo, nestes "gráficos" de funções elementares básicas, as linhas que te parecem ser traçadas continuamente devem sê-lo de facto, independentemente da natureza corpuscular da luz de que são compostas.

João fez um ar admirado, pois não tinha mesmo pensado nisso:

— Então, analogamente, quando tento traçar esses gráficos a lápis no meu caderno, o traço é sempre formado por pequenos átomos de grafite agarrados à superfície do papel!

— Exato. E, claramente, não deve ser essa a imagem na nossa cabeça quando se pensa nos gráficos destas funções.

— Então, mestre, os gráficos que imaginamos existem realmente? Parece que não conseguimos representá-los fielmente!

— Se os números ditos reais existem, dada uma qualquer função que designaremos por f cujo domínio seja $\mathbb{R}$ ou uma sua parte e cujo conjunto de chegada seja $\mathbb{R}$, de um modo puramente algébrico o gráfico pode ser definido como o conjunto dos pares $(x, f(x))$ que se obtêm quando se consideram todos os valores de x no domínio de f. Talvez seja melhor eu escrever em simbologia matemática no teu caderno...

João passou ao mestre o caderno e o lápis que tinha na mão e o mestre resumiu em duas curtas linhas aquilo que tinha acabado de dizer :

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{graf}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\}.$$

O mestre continuou:

— Para a versão geométrica de gráfico, que é o que imaginamos quando pensamos em gráfico, precisamos de fixar um sistema de eixos cartesianos (salvo que poderemos nalguns casos não o considerar monométrico), o eixo horizontal representando o $\mathbb{R}$ contendo o domínio e o eixo vertical representando o $\mathbb{R}$ do conjunto de chegada, e depois marcamos os pontos $(x, f(x))$, para todos os valores de x em D, como no jogo da batalha naval. Infelizmente, parece seguir da nossa discussão de há pouco ser impossível verter fielmente esta ideia para um suporte físico, de modo que a existência fica na nossa mente apenas. Não sei se isto responde à tua questão.

— Bem, mestre, já estou habituada a essa representação, por isso acho que podemos seguir em frente. Suponho que o eixo horizontal seja o que designamos também por eixo das abcissas ou eixo dos xx e o eixo vertical seja o que designamos também por eixo das ordenadas ou eixo dos yy.

— De acordo: o vertical diz-se dos yy porque é a letra y que costuma usar-se para designar os valores de $f(x)$, e nesse caso também se designa a função f por função $y = f(x)$. Será necessário adaptar a designação dos eixos se os nomes das variáveis forem diferentes.

O mestre devolveu o caderno e o lápis à João e continuou:

— Vamos agora ver um exemplo onde, apesar das imperfeições apontadas, os gráficos feitos nalgum suporte físico podem ser de alguma utilidade. Mas antes disso vou-te pedir que resolvas a dupla inequação

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

de um modo puramente algébrico.

— Ora deixe-me escrever no meu caderno... Posso separar nas inequações

$$-1 \leq \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \leq 1,$$

não é?

— Sim, trata-se da conjunção dessas duas.

João dedicou-se à tarefa no seu caderno, tentando aplicar as regras para a resolução de inequações que tinha aprendido no Ensino Básico:

$$-1 \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1,$$

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Depois rematou dizendo:

— Obtive $x \geq -1$ para a primeira inequação e $x \geq 1$ para a segunda inequação. Como tenho que conjugar, isto é, usar aquele sinal $\wedge$, não é (?), obtenho... Deixe-me ver... Posso fazer pelo menos aqui um esquema com a reta real?... Não é gráfico, é só como estou habituada a fazer.

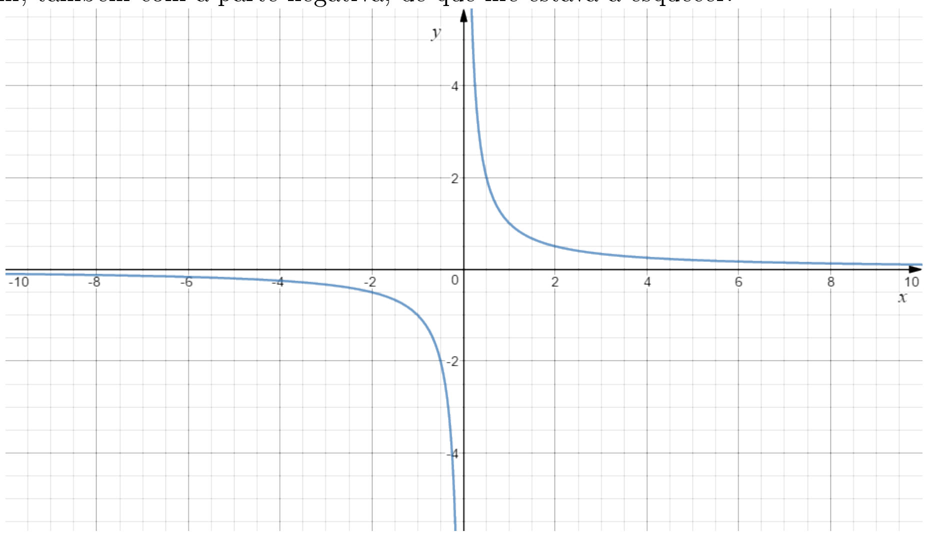
O mestre acenou em sinal de concordância, pois percebeu do que se tratava, e viu a João a traçar uma reta orientada e graduada horizontal e a marcar a zona à direita de -1 e a zona à direita de 1, concluindo que a interseção dava apenas esta última:

— Dá $x \geq 1$. Está certo?

— Tu própria saberás dizer daqui a pouco, pois agora vais resolver o mesmo problema de um modo gráfico. Começa por esboçar o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Se tiveres dificuldade, poderás buscar inspiração aqui há volta.

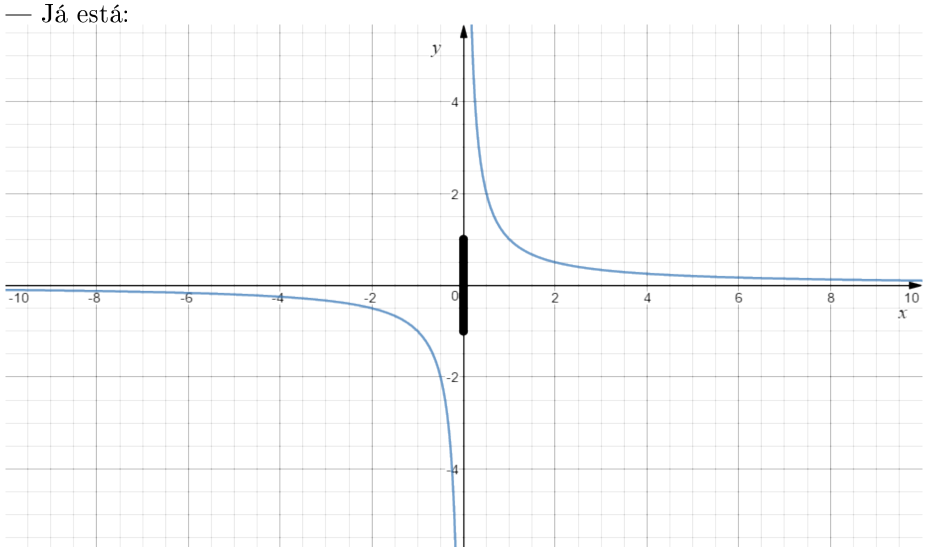
João começou a olhar à volta, enquanto ia dizendo:

— Eu tenho uma ideia de como é, porque os valores invertem, multiplicativamente quero dizer, de modo que quando o x se aproxima de zero o y tende para infinito e quando x tende para infinito o y aproxima-se de zero. Ah, está além, também com a parte negativa, de que me estava a esquecer:



— Agora identificas no eixo dos yy o intervalo de valores de -1 a 1, pois queres que o $\frac{1}{x}$, ou seja, o y, esteja nesse intervalo, extremos incluídos.

— Já está:



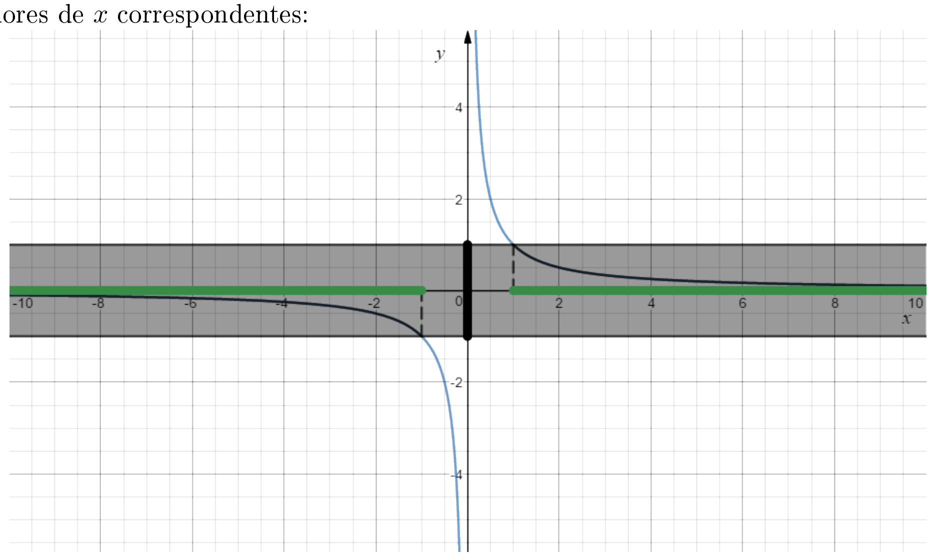
— Agora tens que ir à procura dos valores de x que fazem com que o y correspondente esteja nesse intervalo.

— Como é que faço isso?

— Bom, os (x, y) que emparelham têm que estar sobre o gráfico da função.

— Ah, já estou a ver: traço aqui umas horizontais a partir do $y = 1$ e do

$y = -1$, observo o gráfico na faixa entre estas duas horizontais e procuro os valores de x correspondentes:



— Exato. E então, o que é que dá?

— Bom, obtenho do lado esquerdo que $x \leq -1$ e do lado direito que $x \geq 1$. Não dá o mesmo que na minha resolução algébrica!

— Qual dos resultados estará correto?

João hesitou por uns momentos:

— O segundo processo é novo para mim, mas creio que percebi a lógica da coisa e parece-me bem. Já relativamente ao primeiro processo, eu tentei aplicar as regras que aprendi no Ensino Básico, e acho que não me enganei: até me lembrei que quando multiplico por um número negativo tenho que trocar o sinal da desigualdade, como fiz aqui — João exibia a segunda passagem da primeira linha da sua resolução algébrica.

— O problema é que não te lembraste que o x também pode ser negativo, e se for também tens que trocar o sinal da desigualdade na primeira passagem desta tua primeira linha aqui — o mestre apontava para o local no caderno da João —, e também na primeira passagem da segunda linha.

— Então como é que se fazia algebricamente.

O mestre pediu o caderno e o lápis à João:

— Não é assim tão simples. Uma possibilidade é fazer uso intensivo de conjunções, disjunções e suas propriedades. Eu faço para a primeira inequação:

$$\begin{aligned}
-1 \leq \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad (x > 0 \wedge -x \leq 1) \vee (x < 0 \wedge -x \geq 1) \\
&\Leftrightarrow \quad (x > 0 \wedge x \geq -1) \vee (x < 0 \wedge x \leq -1) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \vee x \leq -1.
\end{aligned}$$

Faz tu para a segunda — o mestre devolveu caderno e lápis à João.

Aplicando a mesma técnica, João concluiu que $\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x < 0$. Depois o mestre continuou:

— Agora temos que fazer a conjunção das duas:

$$(x > 0 \vee x \leq -1) \wedge (x \geq 1 \vee x < 0).$$

— E como é que se faz isso?

— Aplicando a propriedade distributiva da conjunção relativamente à disjunção, e outras regras básicas:

$$\begin{aligned}
&(x > 0 \vee x \leq -1) \wedge (x \geq 1 \vee x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x > 0 \wedge x \geq 1) \vee (x > 0 \wedge x < 0) \vee (x \leq -1 \wedge x \geq 1) \vee (x \leq -1 \wedge x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \vee \text{cond. impossível} \vee \text{cond. impossível} \vee x \leq -1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \vee x \leq -1.
\end{aligned}$$

Compara com o resultado da tua resolução gráfica!

— Dá o mesmo! Incrível: quer dizer que devo confiar mais nas minhas resoluções gráficas?

— Quer dizer que tens que melhorar as tuas resoluções algébricas.

— Mas a resolução algébrica, pelo que o vi fazer, é um bocado confusa, digo para mim... Aquela propriedade distributiva que usou é como se $\wedge$ fosse multiplicação e $\vee$ fosse adição?

— É verdade, daí ter o nome que tem.

— Parece que não me lembro de ter aprendido essa propriedade com conjunções e disjunções!

— O curioso é que também é válida a propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção, o que pode ser útil noutras ocasiões...

— Ou seja, como se fosse a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição mas substituindo agora multiplicação por disjunção e adição por conjunção?

— Isso mesmo.

— Curioso. Qual método de resolução devo usar?

— Nesta fase aconselho-te a tentares os dois métodos em problemas deste género. Em matemática mais avançada, com um número maior de variáveis, nem sempre é possível uma resolução gráfica. Nesses casos a resolução algébrica pode ser a única possibilidade, logo as resoluções algébricas devem ser treinadas em situações simples, onde os resultados podem ser comparados com os obtidos através de resoluções gráficas. Assim, estarás mais à frente preparada para enfrentares os casos em que não tens outra saída senão usares uma resolução algébrica.

O mestre fez uma pausa enquanto deixava a João tomar notas no seu caderno. Depois desafiou-a:

— Reparaste que usaste o princípio da inversão, de que falámos ontem, na resolução gráfica da dupla inequação de há pouco?

Surpreendida por não ter pensado nisso antes, João analisou a resolução gráfica que tinha feito:

— Pois é, mestre: parti do resultado final, neste caso na forma de intervalo de valores que se deviam poder obter para o y, e com a ajuda do gráfico fui à procura do conjunto dos valores possíveis para o x, que neste caso deu a união de dois intervalos... E se a função em causa fosse mais complicada?

— Como é que nós resolvemos anteriormente as situações complicadas?

— Hum... Decompondo em situações mais simples.

— Então resolve lá graficamente esta dupla inequação ligeiramente mais complicada:

$$-1 \leq \frac{1}{\tan x} \leq 1.$$

— Ora, a ordem das operações a partir do x é a seguinte:

- primeiro aplica-se a tangente;
- depois aplica-se a função anteriormente considerada, que inverte multiplicativamente a variável.

Então, pelo princípio da inversão, primeiro inverto o último problema... Hum... A inequação $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$... Mas isso já fizémos há pouco e deu $x \geq 1 \vee x \leq -1$. É este o resultado?... Mas afinal não usei a tangente!...

— Repara que x tem agora um papel diferente do que tinha há pouco. Há agora aqui três variáveis envolvidas, de modo que será melhor dar-lhes nomes diferentes antes de mais.

— Ok... A tangente transforma x numa variável a que vou chamar y... A operação seguinte faz o que fazia a função $y = \frac{1}{x}$, só que agora temos y no lugar de x, por isso vou ter que dar outro nome ao resultado... Por exemplo, z?

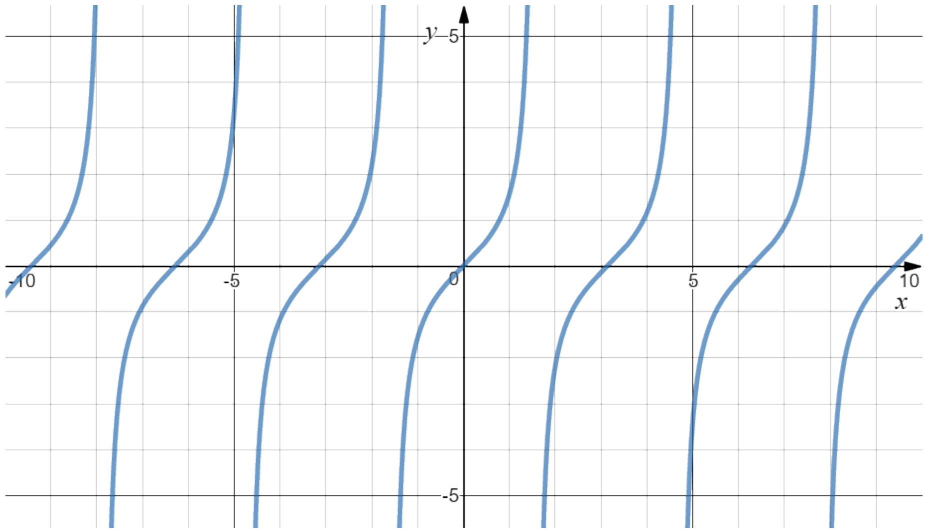
— Pode ser. Refaz agora o teu raciocínio sobre a ordem das operações e anota no teu caderno.

— Certo...

- a primeira operação é $y = \tan x$;
- a operação seguinte é $z = \frac{1}{y}$.

Então, pelo princípio da inversão, primeiro resolvo $-1 \leq \frac{1}{y} \leq 1$, problema que já resolvemos atrás. Usando o novo nome de variável neste caso, já sabemos que dá $y \geq 1 \vee y \leq -1$. Ah, e agora, usando a relação entre x e y, resolvo $\tan x \geq 1 \vee \tan x \leq -1$. Para esse efeito posso usar o processo gráfico que me ensinou. Tenho é que olhar para o gráfico da tangente...

João olhou à volta e rapidamente o reconheceu. Levantou-se e aproximou-se da respetiva estrutura luminosa:



— Este é um bocado confuso, porque a função repete-se... Ããã... É periódica.

— Sim, mas começa por olhar para o ramo central.

— Ok, vou imaginar as retas horizontais a passar no $y = 1$ e no $y = -1$...

Entretanto o mestre levantara-se também e aproximara-se igualmente da estrutura luminosa que representava a tangente:

— Não precisas de imaginar. Ora repara...

E com um gesto rápido na horizontal com um dedo a passar por $y = 1$ fez aparecer um traço luminoso no sítio desejado, ao mesmo tempo que João deixava descair o queixo:

— Como...?

— Faz tu agora aparecer a outra reta que queres.

João repetiu o gesto, agora fazendo deslizar rapida e horizontalmente um dedo a passar por $y = -1$, e o desejado traço luminoso apareceu:

— Bué fixe... Perdão, mestre, mas isto é do outro mundo!... Ok, agora o que me interessa são as faixas $y \geq 1$ e $y \leq -1$.

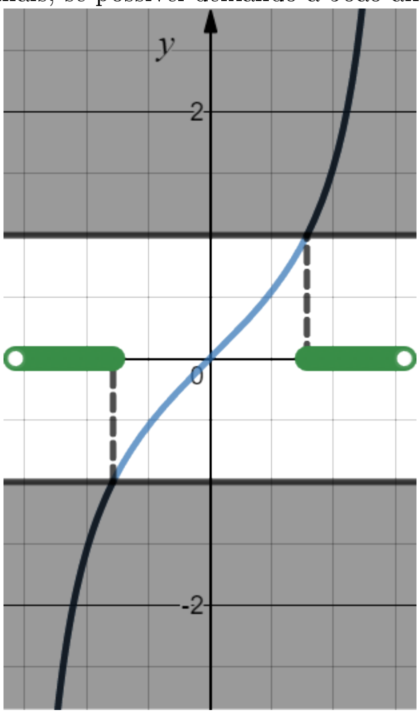
Enquanto João começava a tentar imaginar as faixas, o mestre aproximou as costas de uma das mãos, com a palma para baixo e os dedos arqueados, junto do traço luminoso que tinha criado e esticou rapidamente os dedos para cima. Ato imediato, a faixa acima de $y = 1$ ficou levemente iluminada, simulando um sombreado. O queixo da João já não podia cair mais:

— Posso tentar no outro?

O mestre fez um gesto de aprovação e João aproximou as costas de uma das mãos, com a palma para cima e os dedos arqueados, junto do traço luminoso que tinha criado e esticou rapidamente os dedos para baixo, tendo assim “sombreado” a faixa abaixo de $y = -1$. Depois identificou visualmente o ramo do gráfico dentro das faixas e, por projeção no eixo dos xx, descobriu o que pretendia:

— São estes dois traços aqui...

Instintivamente passou um dedo nas zonas identificadas e estas iluminaram-se mais, se possível deixando a João ainda mais espantada:



O mestre questionou:

— E em termos numéricos quanto é que dá?

— Preciso de saber que valores de x dão tangente igual a 1 ou tangente igual a -1, pelo menos aqui nesta zona central onde o x varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

— Não te lembras como se vê a tangente no círculo trigonométrico?

João pensou um bocado, fez um breve esquema no seu caderno e daí a pouco avançava com uma conclusão:

— Ok, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ e $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$. Juntando tudo, a solução de $-1 \leq \frac{1}{\tan x} \leq 1$ correspondente ao ramo central é

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Mas vejo que há uma repetição periódica para a direita e para a esquerda desta zona.

— Exato. Qual o período da função tangente?

Olhando para a estrutura luminosa, como para se certificar, João respondeu:

— É π. Ah, ok, já me lembro como se faz. O resultado final é

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ufa, mestre, esta era bem mais complicada que a anterior!... Não há uma maneira mais simples de fazer?... É que estou a pensar que se só com uma composição de duas funções deu este trabalho todo, não quero imaginar o trabalho que dará no caso de ter composições de várias funções mais!

— Sim, há uma maneira mais simples de fazer: está na hora de usares o teu portátil, que suponho tenhas trazido contigo.

Depois do que tinha visto no cenário em que se encontravam, João já não se admirava por o mestre sugerir o uso do computador. Regressaram aos lugares onde tinham estados sentados, e onde a João tinha deixado a mochila. Retirou desta o portátil, que ligou, e rapidamente apanhou um sinal de Internet. Nessa altura o mestre sugeriu:

— Procura aí aquele sistema de álgebra computacional muito conhecido e de acesso livre... Que aceita questões computacionais em linguagem próxima da natural, em inglês...

— Ah, sei, a Volfrâmio Beta... Aqui está. E já estou a perceber a ideia... Então escrevo

```
solve -1 less than or equal 1/tan(x) less than or equal 1
```

e carrego em *Enter*... Aí está o resultado... Mas não é suposto fazermos isto em Cálculo... Isto é, nos testes não temos acesso a esta ferramenta.

— É verdade, mas só estava a responder à tua questão. Por outro lado, não sei se já tomaste consciência que se há uma máquina que consegue resolver este tipo de problemas é porque alguém a programou (já para não falar que alguém a construiu), e para isso precisou de saber a matemática em causa.

— Sim, mestre, mas agora qualquer pessoa pode tirar partido disso sem saber a matemática que está por detrás.

— Isso não é totalmente verdade, pois tens que saber inserir corretamente a questão matemática e interpretar o resultado. E se o teu problema for demasiado específico para que haja já uma máquina/programa que o resolva por ti, terás que tu próprio construir o caminho matemático para mandar a máquina calcular os passos intermédios que ela sabe fazer.

— Estou a lembrar-me que já tinha referido isto na parte final da nossa primeira conversa...

— Qual achas que terá sido o processo que a máquina usou para responder à tua questão: o algébrico ou o gráfico?

— Não estou a ver um destes computadores a tirar conclusões a partir da visualização de um gráfico, por isso suponho que tenha usado o processo algébrico.

— É, o processo algébrico usa regras muito claras, que podem ser usadas num algoritmo que a máquina pode correr. Mesmo que exija muitas "contas", a máquina não se importa e, se devidamente programada, não se vai esquecer das regras a aplicar. Já o processo gráfico está mais bem adaptado ao modo como nós, humanos, funcionamos. Além disso, a representação gráfica permite-nos descobrir como definir algebricamente/analiticamente coisas que nos parecem importantes, como continuidade ou diferenciabilidade, ter ideias de como provar teoremas que envolvam tais conceitos, teoremas que depois nos permitem imaginar novos algoritmos que podem ser programados numa máquina para resolvermos problemas mais complexos.

— Compreendo, mestre, mas isso justifica que um aluno de engenharia deva aprender toda essa matemática que vai sendo criada, quando só pretende ter acesso aos processos de cálculo?

— Não será toda, mas a meu ver alguma tem de ser, como já referi anteriormente. Posso juntar mais duas razões. A primeira é que sem algum conhecimento de como as coisas se entrosam torna-se mais difícil a uma pessoa decorar o que tem de fazer na resolução de um problema em concreto: o processo de memorização é mais eficaz quando se conseguem relacionar as coisas, ou seja, perceber. Mesmo que aches que não precisas de memorizar muito, pois tens muita coisa disponível, por exemplo, na Internet, se não tiveres um nível mínimo de compreensão do assunto dificilmente saberás o que queres procurar sobre ele na Internet.

O mestre fez uma pequena pausa para tentar perceber se João o estava a acompanhar. Como parecia ser o caso, continuou:

— A segunda razão é o treino de raciocínio, da atenção ao pormenor, do espírito crítico e da capacidade de aplicação de regras que estudar matemática promove. Haverá com certeza atividades mais ou menos lúdicas que também promovem esse treino, mas geralmente fora do contexto dos problemas que um engenheiro pretende resolver. Ter a possibilidade de fazer esse treino dentro do contexto de problemas relevantes para a sua área profissional é imbatível em termos de eficácia.

Não fosse o caso de João ainda não estar convencida, o mestre decidiu apresentar ainda mais um argumento:

— Estou a reparar na resposta que a máquina te deu à questão que lhe colocaste:

$$tan(x) \neq 0 \ \texttt{and} \ \pi n - \tfrac{\pi}{2} < x \leq \pi n - \tfrac{\pi}{4} \ \texttt{and} \ n \in \mathbb{Z} \ \texttt{and} \ n \in \mathbb{Z}\,\texttt{;}$$
$$tan(x) \neq 0 \ \texttt{and} \ 2\pi n + \tfrac{\pi}{4} \leq x < 2\pi n + \tfrac{\pi}{2} \ \texttt{and} \ n \in \mathbb{Z} \ \texttt{and} \ n \in \mathbb{Z}\,\texttt{.}$$

Vejo que falta uma infinidade de regiões onde x também é solução: na segunda linha só se estão a adicionar múltiplos pares de π, quando se deviam adicionar todos os múltiplos de π!

— Este programa pode dar resultados errados?!

— Pelo menos incompletos, pelos vistos, como é o caso. Sabendo que a função tangente é periódica de período π, dado qualquer x que seja solução, $x + k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, também é solução, logo não se percebe o porquê de se adicionarem apenas os múltiplos pares de π. Isto é espírito crítico e conhecimento básico sobre uma das funções do problema a funcionar na deteção de que algo não está bem.

— Quer dizer que não posso confiar neste *software*?...

— Não deves colocar as coisas nesses termos. Apesar da crítica, esse software acertará muito mais vezes de que tu, e até talvez um pouco mais vezes do que eu, numa sequência de cálculos...

— Mais vezes do que o mestre também?!

— Sim, porque num momento de desatenção posso não reparar nalgum pormenor. Não é que não saiba como fazer: o problema é que a execução pode não ser perfeita. A chave para controlar estas imponderabilidades é tentar chegar ao mesmo resultado por outras vias, ou no mínimo ganhar alguma intuição sobre o tipo de problemas em causa.

— Mas num teste mal tenho tempo para fazer de uma maneira, quanto mais tentar outras vias!...

— Novamente, não me refiro ao que se passa durante os testes, mas sim ao que deve ser feito quando queremos ter certezas sobre se um resultado está correto. Também podes pedir a outras pessoas que resolvam o mesmo problema e comparar os resultados. Por exemplo, no que diz respeito à investigação que se faz em matemática, já aconteceu alguém ter pensado que tinha demonstrado o que pensava ser um teorema e um colega vir mais tarde a apontar um erro. Em casos menos graves o resultado em causa era mesmo um teorema e foi possível "consertar" a demonstração. Em casos mais graves o resultado era falso, logo não era um teorema. Quantos mais especialistas escrutinam uma demonstração e concordam que está correta, mais confiança temos de que o resultado que se pretende provar é de facto verdadeiro.

— Ok, mestre, entendo. Mas voltando àquilo que me seria mais útil num teste... Bom, eu disse que mal tenho tempo de fazer de uma maneira, mas às vezes não consigo é fazer de maneira nenhuma, e portanto seria útil saber alternativas para atacar um problema. No caso da resolução de uma inequação, como estávamos a ver há pouco, existe outra maneira que eu possa tentar num teste, caso me atrapalhe com o processo que me ensinou?... Como referi há bocado, estou a pensar no caso de a função com que temos de trabalhar resultar da composição de várias funções.

— No caso de a função que resulta da composição não se conseguir identificar entre as funções elementares básicas, ainda assim pode tentar-se obter diretamente um esboço do seu gráfico, de modo a que o processo gráfico de resolução, que te expliquei, se tenha que utilizar somente uma vez.

— Mas aí preciso novamente de um computador ou de uma calculadora gráfica, o que não posso usar num teste!

— Há uma maneira alternativa de se ter uma ideia do gráfico de uma função que não passa pelo uso dessas máquinas. Aliás, o algoritmo mais básico para fazer com que elas tracem gráficos consiste em marcar pontos, muitos pontos, mas mesmo assim não todos os pontos, logo se o algoritmo usado não for capaz de fazer também uma análise qualitativa da função a representar, pode não detetar características importantes do seu gráfico. Mas também aqui não quero dizer que não as possas usar de um modo efetivo: se conheceres o tipo de função em causa sabes o que esperar e podes confrontar o teu conhecimento com o resultado que a máquina te dá e decidir o que fazer com esse resultado.

— Mas então como é que eu faço essa análise qualitativa à mão?

— Tentas determinar o quadro de variação da função, isto é, saber quando cresce e quando decresce, partindo de onde e chegando a onde, tirando partido das zonas do domínio onde sabes que a função é contínua e usando ferramentas como o cálculo de derivadas ou de limites em geral.

— Ah, a derivada... Quando é positiva a função cresce, quando é negativa a função decresce...

— É aqui que começa propriamente o Cálculo, de modo que me parece um bom ponto para interrompermos a nossa conversa de hoje. Deixo-te um desafio, para terminarmos: resolver a dupla inequação anterior, $-1 \leq \frac{1}{\tan x} \leq 1$, fazendo o quadro de variação de $y = \frac{1}{\tan x}$ com a ajuda da derivada desta função e depois tentar aplicar o processo gráfico.

— Certo, farei isso. Entretanto lembrei-me de uma coisa que penso que está relacionada com esta nossa conversa. Será que ainda temos um bocadinho de tempo?...

— Sim, e se está relacionada pode ser útil discutirmos isso já.

— Recordo-me de nalgumas aulas de Cálculo se resolverem problemas de determinação do contradomínio de uma função. Ora o contradomínio é o que se obtém quando se aplica a função aos valores do domínio, não é (?), por isso estava a pensar que se poderia aplicar também aqui o processo gráfico, mas partindo agora do eixo dos xx, em vez de ser do eixo dos yy, como se fez anteriormente...

João fez um breve esboço no seu caderno, um referencial cartesiano e uma curva a dar a entender que se tratava do gráfico de uma função, e continuou, explicando com o apoio desse esboço:

— Pego nos valores de x no domínio aqui no eixo dos xx, subo (ou desço) perpendicularmente até ao gráfico e depois vou em direção perpendicular ao eixo dos yy para encontrar os correspondentes valores de y no contradomínio. Isto está certo?

— Certíssimo!... Também neste caso o processo gráfico é capaz de ser mais seguro para ti, enquanto não dominares o processo algébrico. Além disso, tal como antes, se fizeres pelos dois processos e der diferente saberás que cometeste algum erro algures, de modo que valerá a pena refazeres ambos os raciocínios para perceberes onde erraste e aprenderes com o erro.

— Tem razão. E, tal como anteriormente, no caso de a função a considerar ser composição de várias funções mais simples com gráficos conhecidos, posso aplicar o processo gráfico repetidamente, de cada vez aplicando-o ao gráfico de uma das funções simples que decompõem a função dada, não é?

— Exato. Ou, tal como anteriormente, também podes, através de um quadro de variação, perceber como é que o gráfico da função dada se comporta, de modo que assim só aplicas o processo gráfico uma vez. Podes, por exemplo, exercitar todas estas variantes para determinares o contradomínio da função do exercício anterior, que era $\frac{1}{\tan x}$.

— A propósito desta função, há pouco queria perguntar-lhe uma coisa e esqueci-me: $\frac{1}{\tan x}$ não é a mesma coisa que $\cot x$, cujo gráfico já conheço e poderia usar de imediato? Por exemplo, para dizer que o contradomínio de $\frac{1}{\tan x}$ é todo o $\mathbb{R}$?

— Há uma pequena diferença entre essas duas funções, que vou deixar para descobrires.

— Hum... Então aqui há gato!... Está bem, vou pensar melhor... E quanto às funções aqui à nossa volta e que não conheço?... Por exemplo, aquelas, que não me são totalmente estranhas, mas não estou a ver quais serão? — João apontava para algumas das estruturas iluminadas.

— Sim, dessas em particular provavelmente já ouviste falar: são as funções trigonométricas inversas. Mas isso é assunto que terá mesmo que ficar para outra conversa.

Índice