Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento 4

Folha de soluções **Ano letivo 2016/2017** (2º Semestre)

1.2 Derivadas parciais e extremos globais

---

1. (a) $D = [-1,-1] \times]-1,1[$ (quadrado excluindo os segmentos horizontais pertencentes às retas $y = \pm 1$).
   (b) (i) $\text{fr}(D) = (\{-1,1\} \times [-1,1]) \cup ([-1,1] \times \{-1,1\})$;
   (ii) $\text{int}(D) =]-1,1[\times]-1,1[$;
   (iii) $\text{ext}(D) = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1] \times [-1,1])$;
   (iv) $D' = [-1,1] \times [-1,1]$.
   (c) D não é aberto nem é fechado.

2. D não é fechado nem é aberto.

3. (a) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. É prolongável por continuidade a $(0,0)$.
   (b) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Não é prolongável por continuidade a $(0,0)$.

4. (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x^2 + y^2) > 0\}$. Justificação da continuidade: a função logaritmo natural, ln, é contínua (em $\mathbb{R}^+$); a função cosseno é contínua (em $\mathbb{R}$); a composição de funções contínuas é uma função contínua, tal como a soma de duas funções obtidas pelo produto de duas funções projeção.
   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Justificação da continuidade: a função arcotangente é contínua (em $\mathbb{R}$) e a composição de duas funções contínuas é contínua; o argumento da função arcotangente é uma função contínua, pois corresponde ao quociente de duas funções contínuas (apenas temos que garantir que o denominador nunca se anula).
   (c) $D = \mathbb{R}^2$. Justificação da continuidade: uma função constante é contínua.
   (d) $D = \mathbb{R}^2$. Justificação da continuidade: a função seno é contínua (em $\mathbb{R}$); a composição de duas funções contínuas é contínua; o argumento da função seno é contínua, pois corresponde ao produto de funções contínuas (3 funções de projeção).
   (e) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Justificação da continuidade: o produto de uma função projeção com a composição da função exponencial (que é contínua) com uma função contínua; para esta última a justificação é ser o quociente de uma função constante com somas de funções obtidas por produtos de projeções.

(f) $D = \mathbb{R}^3$. Justificação da continuidade: uma função projeção é contínua.

(g) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Justificação da continuidade: a composição de uma função logaritmo (que é uma função contínua) com uma função contínua (obtida por soma de dois produtos de funções projeção) é contínua.

(h) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$; o quociente de duas funções contínuas é contínua (apenas temos que garantir que o denominador nunca se anula). O numerador corresponde à composição da função exponencial (que é contínua) com a soma de duas funções projeção e o denominador corresponde à soma de duas funções projeção.

5. (a) aberto e fechado, $S = \mathbb{R}^2$;
   (b) aberto e fechado, $S = \emptyset$;
   (c) fechado;
   (d) aberto;
   (e) fechado;
   (f) nem aberto nem fechado;
   (g) fechado;
   (h) nem aberto nem fechado;
   (i) fechado;
   (j) fechado;
   (k) nem aberto nem fechado;
   (l) fechado.

6. (a) aberto;
   (b) aberto;
   (c) aberto;
   (d) não é aberto, pois $S \cap \text{fr}(S) \neq \emptyset$;
   (e) aberto;
   (f) aberto.

7. (a) Não é aberto nem é fechado.
   Não é limitado: contém a reta $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.
   fronteira= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 9 \vee x + y = 0\}$,
   interior= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < 9\}$
   exterior= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0 \vee x + y > 9\}$

(b) É fechado. Não é aberto.
É limitado: $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| < 1$, logo a conjunto está contido num disco de raio 1. (Alternativamente, o conjunto representa um losango centrado na origem com vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, pelo que está contido num disco de raio 1.)
fronteira= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$.
interior= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.
exterior= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| > 1\}$.

(c) Não é aberto nem é fechado.
Não é limitado: contém a hipérbole $xy = 1$.
fronteira= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \ \vee \ xy = 1\}$
interior= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \wedge xy < 1\}$
exterior= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0 \vee xy > 1\}$

(d) Nem é aberto nem é fechado.
É limitado: a região é a porção do paraboloide de revolução em torno do eixo dos zz até altura 1, com concavidade voltada para cima, pelo que está contida na esfera sólida de raio $\sqrt{2}$ centrada na origem.
fronteira= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \leq 1\} \cup \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
interior= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$
exterior= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > z \vee z > 1\}$

(e) É fechado. Não é aberto.
É limitado: a região é um disco centrado na origem de raio 1 contido no plano $y = x$, pelo que ela está contida na esfera de raio 1 centrada na origem.
fronteira= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\ y = x\} = \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 \leq 1\}$.
Interior= $\emptyset$.
Exterior= $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 \leq 1\}$.

8. (a) Como a expressão é contínua em $\mathbb{R}^2$, que é o seu domínio de definição, então f é contínua em D; e como D é limitado e fechado, então existem $c, d \in \mathbb{R}$ que são, respetivamente, o menor e o maior valor que f atinge.

   (b) D é um losango centrado na origem com os vértices nos eixos dos xx e yy. Como a função expressa a distância ao quadrado de um ponto $P = (x,y)$ à origem, o máximo absoluto é 1 com maximizantes absolutos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, e o mínimo absoluto é 0 com minimizante absoluto $(0,0)$.

9. Não. O conjunto A não é fechado.

10. Como $z = f(x,y) = -x^2$ então $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto infinito de maximizantes f. De facto, $-x^2 \leq 0$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,y) =$

0. Logo $f(x,y) \leq f(0,y)$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então f atinge o seu valor máximo (absoluto) 0 em qualquer ponto da reta $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$.

11. (a) Não, porque o domínio de f, que neste caso particular é $\mathbb{R}^2$, não é um conjunto limitado.

    (b) De facto, $x^2+y^2 \geq 0$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $f(0,0) = 0 \leq x^2+y^2 = f(x,y)$, para todo o $(x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2$ e o valor mínimo é 0, que é atingido na origem, sendo que $(0,0)$ é até o único minimizante absoluto de f.

12. Como $-\sqrt{x^2+y^2} \leq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 0$, temos que e $f(x,y) \leq f(0,0)$ para todo $(x,y) \in A$. Logo $(0,0)$ é (o único) maximizante absoluto de f.

13. (a) O conjunto B é fechado e limitado; f é claramente contínua; o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em B.

    (b) $(0,-1)$ é minimizante absoluto de f em B e $(0,1)$ é maximizante absoluto de f em B. Note que estes pontos não são pontos críticos de f.

    (c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ logo é diferenciável no conjunto aberto A; por outro lado $\nabla f(x,y) = (0,1)$, logo a função não possui pontos críticos em A e portanto não possui pontos extremos em A (nem em $\mathbb{R}^2$).

14. Na origem a função vale $\frac{1}{2}$, enquanto por exemplo em $(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$, que é um valor maior.

15. (a) $f'_x(x,y) = 3x^2+2y$, $f'_y(x,y) = 2x$;

    (b) $f'_x(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$, $f'_y(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$;

    (c) $f'_x(x,y) = 2y^3e^{2xy^3}$, $f'_y(x,y) = 6xy^2e^{2xy^3}$;

    (d) $f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$;

    (e) $f'_x(x,y) = \sin(2(x-3y))$, $f'_y(x,y) = -3\sin(2(x-3y))$;

    (f) $f'_x(x,y) = -\frac{y}{x^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{x}$;

    (g) $f'_x(x,y) = 2xy + y\cos(x)$, $f'_y(x,y) = x^2 + \sin(x) - \sin(y)$;

    (h) $f'_x(x,y,z) = 2x+z^2$, $f'_y(x,y,z) = 2y$, $f'_z(x,y,z) = 2xz$.

16. (a) $f'_x(x,y,z) = y \;\Rightarrow\; f'_x(1,1,1) = 1$;
    $f'_y(x,y,z) = x \;\Rightarrow\; f'_y(1,1,1) = 1$;
    $f'_z(x,y,z) = e^z \;\Rightarrow\; f'_z(1,1,1) = e$;

(b) $j'_x(x,y,z) = 2x + z^2 \;\Rightarrow\; j'_x(1,0,1) = 3;$

$j'_y(x,y,z) = 2y \;\Rightarrow\; j'_y(1,0,1) = 0;$

$j'_z(x,y,z) = 2xz \;\Rightarrow\; j'_z(1,0,1) = 2;$

(c) $g'_x(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \;\Rightarrow\; g'_x(0,1) = 0;$

$g'_y(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \;\Rightarrow\; g'_y(0,1) = 1;$

(d) $h'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; h'_x(1,0) = 2;$

$h'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; h'_y(1,0) = 0.$

17. (a) $(e^z - ye^x)|_{(x,-1,0)} = 1 + e^x$

    (b) $(-e^x - ze^{-y})|_{(0,y,-1)} = -1 + e^{-y}$

    (c) $(xe^z - e^{-y})|_{(0,-1,z)} = e$

18. (a) $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1);$

    (b) $(2,3)$; $(x,0)$, para $x \in \mathbb{R}$; $(0,y)$, para $y \in \mathbb{R}$;

    (c) $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, para $k \in \mathbb{Z}$;

    (d) $(0,0,0);$

    (e) $(0,0,0), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1), (1,1,1).$

19. $f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2-1 \geq -1$, pois $(x-1)^2+(y-2)^2 \geq 0$, $f(1,2) = -1$ e para qualquer $(x,y) \neq (1,2)$ verifica-se que $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$, logo $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$.

20. (a) Não tem pontos críticos. A expressão que define f, se considerada no seu domínio de definição, tem apenas $(-4,6)$ como ponto crítico. Como $(-4,6) \notin D$, f não tem pontos críticos.

    (b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, pois f é contínua em D e D é um conjunto compacto.

    Os maximizantes e minimizantes de f são atingidos na fronteira de D. O valor máximo de f em D é 17 e é atingido no ponto $(1,2)$ e o valor mínimo de f em D é -3 e é atingido no ponto $(1,0)$.

21. $(0,0)$ é minimizante e $(0,-1), (0,1)$ são maximizantes.

22.

23. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad y < 2 \\ \\ 1 & se \quad y > 2 \end{cases}$

    com $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,2) : x \in \mathbb{R}\}$.