# Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Cálculo II - Agrupamento 4**

**Folha de soluções** **Ano letivo 2016/2017** (2º Semestre)

**1.3 Derivadas, gradientes e diferenciais - parte 3**

---

1. (a) Note que $\nabla V(x,y) = \left(2e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}(x^2-10),\ 2e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}xy\right)$. Comece por mostrar que $V$ é diferenciável em $(1,2)$. A taxa máxima de variação do potencial no ponto $(1,2)$ é

$$\|\nabla V(1,2)\| = \sqrt{(-18e^{-\frac{1}{4}})^2 + (4e^{-\frac{1}{4}})^2}.$$

   (b) Direção e sentido em que aumenta mais a partir da origem é $\dfrac{\nabla V(0,0)}{\|\nabla V(0,0)\|} = (-1,0)$ e a direção e sentido em que diminui mais a partir da origem é $-\dfrac{\nabla V(0,0)}{\|\nabla V(0,0)\|} = (1,0)$.

2. (a) Comece por mostrar que $T$ é diferenciável em $(2,\frac{1}{2})$. Direção e sentido de maior crescimento da temperatura a partir de $(2,\frac{1}{2})$ é $\dfrac{\nabla T(2,\frac{1}{2})}{\|\nabla T\left(2,\frac{1}{2}\right)\|} = \left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, sendo o valor da taxa de crescimento $\left\|\nabla T\left(2,\dfrac{1}{2}\right)\right\| = 5$.

   (b) $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$, sendo o valor da taxa de crescimento nessa direção e sentido $-\left\|\nabla T\left(2,\dfrac{1}{2}\right)\right\| = -5$.

3. (a) Note que $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ e $\nabla f(1,-1) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$. (A partir daqui procede-se como em questões análogas anteriores)

   (b) Note que $\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-2y^2}},\ -\frac{2y}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}\right)$ e $\nabla f\left(1,\frac{1}{2}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}},\ -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. (A partir daqui procede-se como em questões análogas anteriores)

4. $y = 2\sqrt{2}\,x - 3$.

5. Reta perpendicular à curva no ponto dado é $(x,y) = (1,2\sqrt{2}) + \lambda\left(\frac{10}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Reta tangente à curva no ponto dado é $(x,y) = (1,2\sqrt{2}) + \lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{5},1\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

6. Equação do plano tangente: $7x + 3y - z + 8 = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(7, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

7. (a) Equação do plano tangente: $(0, 0, -1) \cdot (x, y, z - 1) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(0, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Equação do plano tangente: $(13, 15, 1) \cdot (x-2, y+3, z-4) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (2, -3, 4) + \lambda(13, 15, 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Equação do plano tangente: $(2, 1, -1) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (1, 1, -2) + \lambda(2, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (d) Equação do plano tangente: $(4, 4, 1) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (1, 1, -2) + \lambda(4, 4, 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (e) Equação do plano tangente: $(6, -4, -4) \cdot (x - 3, y - 2, z - 2) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (3, 2, 2) + \lambda(6, -4, -4), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (f) Equação do plano tangente: $(10, 10, -10) \cdot (x - 5, y - 5, z - 5) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (5, 5, 4) + \lambda(10, -10, 10), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (g) Equação do plano tangente: $(1, -1, -4) \cdot (x - 3, y - 4, z - 2) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (3, 4, 2) + \lambda(1, -1, -4), \lambda \in \mathbb{R}$.

8. Equação do plano tangente: $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right) \cdot (x-3, y-4, z+2) = 0$. Equação de reta normal: $(x, y, z) = (3, 4, -2) + \lambda\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right), \lambda \in \mathbb{R}$.

9. $\left(\dfrac{5}{\sqrt{30}}, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}, 0\right)$.